

### Inhaltsverzeichnis

Heft 3, Band 38 (2018)

ALEXANDRA PRECHTL UND NICOLAI VON SCHROEDERS	„Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ – Alltagssprache und Mathematik im Anfangsunterricht zur Stochastik	2
NORBERT HENZE	Verständnisorientierter gymnasialer Stochastikunterricht – quo vadis?	12
JULIE BECK	Koinzidenzen und der Sinn des Lebens	23
NORBERT HENZE	Wartezeitprobleme in Bernoulli-Ketten – ein verständnisorientierter Zugang	24
NORBERT HENZE	Der verwirrte Passagier	32

### Berichte und Mitteilungen

MANFRED BOROVCNIK, HANS-DIETER SILL UND THOMAS WASSONG	Bibliographische Rundschau	34
--	----------------------------	----

---

### Vorwort des Herausgebers

So ein Zufall! Alles ist möglich! Alles ist Zufall. Das Kausalitätsprinzip wird in der Physik – versuchsweise – durch das Zufallsprinzip ersetzt. Alle Entwicklungen – vom Big Bang bis zum atomaren Zerfall – werden durch Zufall beschrieben, nicht erklärt. Wenn der Zufall es will, passieren Dinge, die wir dann als Koinzidenzen empfinden, als (unheimliche) Anhäufung von Ereignissen. Es scheint ein archaisches Verlangen nach deistischen, schicksalshaften Erklärungen zu geben. Solche archetypischen Verhaltensweisen, die in anderen Lebensbereichen gut funktionieren, in stochastischen Zusammenhängen aber großteils gnadenlos versagen, prägen unser Verhalten und unsere Erwartungshaltung.

Daher lagern sich mathematische Verfahren und Korrekturen der Begriffe rund um den Zufall nur oberflächlich in unserem Verstand an. Wir weichen demnach auch allzu leicht und leichtfertig, auch nachdem wir Begriffe rund um den Zufall verstanden haben, auf solche Strategien aus. Ich habe das in einem Büchlein mit Carmen Batanero beschrieben. Wenn wir die Poisson-Verteilung kennen, wissen wir, dass Häufungen von Ereignissen ganz gewöhnlich sind. Allerdings, wenn sich die Ereignisse häufen, vergessen wir das alles und sind schnell bereit, von einem „Gesetz der Serie“ zu sprechen und nach besonderen Ursachen bzw. Verursachern zu suchen. Im letzten Heft, das

ich betreut habe (Heft 3, 2014), hatte es sich ergeben, dass wir wenige druckfertige Originalbeiträge hatten. Es hat also neben einem Grundsatzbeitrag zur Beschreibenden Statistik einen mannigfaltigen Querschnitt an Übersetzungen aus *Teaching Statistics* gegeben; Welch eine Häufung!

Nunmehr liegt ein Heft vor, das neben einem Grundsatzartikel zu Zufall und Wahrscheinlichkeit, also zur intuitiven Erfassung von Zufall im Anfangsunterricht, nur Beiträge von Norbert Henze hat. Zufällig auch noch die Koinzidenz, dass ich selbst – mit der österreichischen Triga (Borovcnik, Götz, Maaß) gerade eben in Heft 2 einen Beitrag zum selben Thema veröffentlichen konnte. Es scheint also gerade zu brennen, das Verhältnis zwischen intuitiven Vorstellungen vom Zufall und der mathematischen Erfassung des Zufalls zu klären.

Es gibt demnach ein weites Spannungsfeld, was als Zufall zu betrachten ist und was überhaupt Zufall ist und wie sich Zufall in andere Welterklärungen (Naturwissenschaften, Religion, Mathematischer Zufall) einpassen kann. Wichtig ist, dass man über diese Fragen im Anfangsunterricht nicht hinwegsieht, sondern offen darüber redet. Genau das ist Thema des Beitrags von Prechtel und Schröder. Wenngleich eine Klärung nicht wirklich möglich ist. Die Diskussion bereitet aber die mathematische Begriffsbildung und ihren Stellenwert vor und zeigt auch, wie die Mathematik eingreifen wird.

Gerade dies leisten die Beiträge von Norbert Henze.

Im verständnisorientierten gymnasialen Stochastikunterricht zeigt Henze auf, wo wir heute stehen. Er plädiert für mehr Akzente in mathematischer Begriffsbildung und weniger Routinedurchrechnung von „Faustregeln“, wie dies heute im Unterricht üblich ist. Interessant hierbei sind auch die Überlegungen, die Binomialverteilung stärker an ihre Herkunft, die Bernoulli-Kette mit der *Unabhängigkeit* der einzelnen Stufen der Kette, zu binden. Das bettet die Situation in das Konzept von Stichproben ein und leitet direkt zur beurteilenden Statistik über.

Das erleichtert auch den Zugang zur Additivität von Erwartungswerten, sodass sich der Erwartungswert der Binomialverteilung als  $n$ -fache Summe der Erwartung  $p$  auf der einzelnen Stufe als  $np$  ergibt. Die Unabhängigkeit zwischen den Stufen garantiert Additivität auch für die Varianz, weshalb die Varianz der einzelnen Stufe von  $p(1-p)$  zu  $np(1-p)$  addiert wird (wie „Pythagoras“ im rechtwinkligen Dreieck; ja, der Unabhängigkeit entspricht die Orthogonalität in der Linearen Algebra). Ein wunderbares Argument auch für die Varianz anstelle anderer Maße für die Variabilität von Zufallsvariablen.

Ich habe das in den 1980er Jahren als stochastische Struktur bezeichnet; manche Verteilungen folgen einer stochastischen Struktur und diese lässt dann ihrerseits Anwendungen ganz besonders gut rechtfertigen, nämlich wenn sie zu dieser Struktur passen. Diese Suche nach Struktur und dieses Nutzen stochastischer Struktur setzen sich im Beitrag zu Wartezeiten von Henze fort.

Im verwirrten Passagier geht Henze auf das Problem ein, wie wahrscheinlich es denn ist, dass der letzte Passagier, der das Flugzeug betritt, seinen Platz einnehmen kann. Vorher hatten alle einen Platz zugewiesen (sagen wir die Plätze Nr. 1 bis  $n$ ) und die Personen steigen in der Reihenfolge ihrer Nummer ein. Allerdings ist Passagier Nr. 1 verwirrt und – statt seinen Platz einzunehmen – sucht er sich zufällig einen der Plätze aus. Sofern weitere Passagiere ihren Platz leer vorfinden, nehmen sie diesen ein, ansonsten „spielen sie verwirrter Passagier“ und nehmen einen der verbleibenden Plätze zufällig ein.

Die Lösung stützt die Intuition, dass irgendwann beim Einsteigen sich ein Passagier zwischen Platz 1 und  $n$  entscheiden muss. Egal, wer das ist, er tut das mit gleicher Wahrscheinlichkeit (nicht mit  $\frac{1}{2}$ ). In allen Konstellationen haben Platz 1 und  $n$  dieselbe Wahrscheinlichkeit, bis zu Passagier  $n-1$  eingenommen zu werden, daher bleibt dem letzten nur Platz 1 oder  $n$  übrig, und das mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$ . Verwirrend auch, dass die Wahrscheinlichkeit für den letzten seinen Platz zu bekommen  $1/n$  ist, wenn alle Passagiere „verwirrt“ sind.

Das Schöne an diesem Aufsatz ist, dass erst die mathematische Argumentation das intuitiv einsichtige Argument freilegt. Diese intuitive Einsicht allerdings stützt dann gegengleich das mathematische Argument enorm. Genau so soll Mathematik sein.

Ich wünsche Ihnen eine anregende Lektüre!

Klagenfurt, im August 2018                      Manfred Borovcnik

## „Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ – Alltagssprache und Mathematik im Anfangsunterricht zur Stochastik

ALEXANDRA PRECHTL UND NICOLAI VON SCHROEDERS, NÜRNBERG

**Zusammenfassung:** *Stochastisches Denken wird zu einem großen Teil durch individuelle Erfahrung beeinflusst, wodurch auch im mathematischen Verständnis wertfreien Begriffen der Stochastik eine individuelle Konnotation zukommt. Die Alltagssprache und deren Semantik unterscheiden sich allerdings deutlich vom Bedeutungsfeld der Fachsprache. Gerade im Anfangsunterricht zur Stochastik, dem häufig ein empirisches Wahrscheinlichkeitsverständnis zu Grunde liegt, ist es von besonderer Relevanz, diese Deutungsunterschiede herauszuarbeiten und sinngemäß zu verwenden. Im Folgenden wird deshalb nach einigen Begriffsdefinitionen exemplarisch die Diskrepanz zwischen Fachsprache und Umgangssprache in der Stochastik aufgezeigt; daraus werden abschließend Konsequenzen für den Unterricht abgeleitet.*

### 1 Zufall

Nachdem im Statistikunterricht bereits von „zufälligen Vorgängen“ die Rede war, begegnen Schülerinnen und Schüler in der Regel dem Begriff des Zufalls spätestens in der Wahrscheinlichkeitstheorie im Kontext des empirischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs. Dort wird er teilweise bei der Definition des „Zufallsexperimentes“ bzw. des „Zufallsversuches“ verwendet, ohne vorher eindeutig definiert worden zu sein. Derartige Definitionen lauten dann so:

„Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, dessen Ergebnis zufällig, also nicht vorhersagbar ist“ (Brandl et al. 2013, S. 214).

„Zufall“ ist als Begriff der Alltagssprache jedem Schüler geläufig (siehe Abschnitt 1.2). Dabei ver-